Министерство образования и науки Хабаровского края
краевое государственное бюджетное профессиональное
образовательное учреждение
«Советско-Гаванский промышленно-технологический техникум»

Математика

методические указания и контрольные задания для студентов по всем специальностям

г. Советская Гавань, 2020г

Составитель: Шелудько Е. Е., преподаватель КГБ ПОУ СГПТТ

Методические указания составлены в соответствии с программой по дисциплине «Математика»

Рассмотрено на заседании ПЦК
Протокол №____
от «___»_____2020г
Председатель ПЦК
_____

Утверждено
Методическим советом техникума
Протокол №____
от «___»_____2020г

Введение

Методические рекомендации по дисциплине «Математика» предназначены для самостоятельной работы студента при нестационарной форме контроля знаний.

Изучение курса математики направлено на достижение следующих целей:

- **формирование представлений** о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, об идеях и методах математики;
- **развитие** логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- **овладение математическими знаниями и умениями,** необходимыми в повседневной жизни, для изучения смежных естественно-научных дисциплин на базовом уровне и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- **воспитание** средствами математики культуры личности, понимания значимости математики для научно-технического прогресса, отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей.

Содержание учебной дисциплины

Тема 1. Линейная алгебра

Понятие матрицы. Перестановки. Определители. Системы линейных уравнений. Формулы Крамера. Действия над матрицами. Матричное решение систем линейных уравнений. Ранг матрицы. Метод Гаусса.

Знать: понятия матрицы, определителя, ранг матрицы.

Уметь: выполнять действия над матрицами, вычислять определители, решать системы уравнений различными методами.

Тема 2. Векторная алгебра

Понятие вектора. Операции над векторами. Проекция вектора на ось. Свойства проекций. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов и его свойства. Векторное произведение векторов и его свойства. Смешанное произведение векторов и его свойства.

Знать: понятие вектора, определение скалярного, векторного и смешанного произведения векторов, их свойства.

Уметь: выполнять операции над векторами, вычислять скалярное и смешанное произведение векторов, находить векторное произведение.

Тема 3. Дифференциальное исчисление

Производная функции, ее геометрический и механический смысл. Формулы производных. Изучение производных суммы, произведения, частного функций. Обоснование производных элементарных и сложных функций, обратных функций.

Изучение производной при исследовании функций и построения графиков. Определение функции нескольких переменных.

Знать: понятие производной, её геометрический смысл, формулы и правила для нахождения производных.

Уметь: исследовать функции и строить их графики с помощью производных

Тема 4. Интегральное исчисление

Первообразная функция и неопределенный интеграл. Основные свойства и формулы неопределенных интегралов. Методы интегрирования.

Основные свойства определенных интегралов. Формула Ньютона- Лейбница для вычисления определенного интеграла. Вычисление определенных интегралов различными методами. Применение определенного интеграла к вычислению площади плоской фигуры, объемов тел.

Составление дифференциальных уравнений на простых задачах. Решение дифференциальных уравнений с разделяющими переменными, однородных линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Знать: понятие определённого и неопределённого интеграла, первообразной функции, свойства интеграла, формулы для нахождения первообразных, формулу Ньютона-Лейбница.

Уметь: находить неопределённые интегралы, вычислять значения определённого интеграла, вычислять площадь криволинейной трапеции, решать дифференциальные уравнения

Тема 5. Последовательности и ряды

Числовая последовательность. Пределы функций и последовательности. Разложение функций в ряд Маклорена. Нахождение пределов последовательности и предела функции в точке и на бесконечности. Числовые ряды. Сходимость и расходимость рядов. Признак Даламбера.

Знать: понятие последовательности и предел последовательности, признаки сходимости и расходимости рядов, признак Доламбера.

Уметь: находить пределы последовательностей, исследовать ряды на сходимость, вычислять предел функции в точке и на бесконечности.

Тема 6. Теория вероятности и математическая статистика

Определение вероятности события. Изложение основных теорем и формул вероятностей: теорема сложения, условная вероятность, теорема умножения, независимость событий, формула полной вероятности. Случайные величины. Дисперсия случайной величины.

Представление данных (таблицы, диаграммы, графики), генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана. Понятие о задачах математической статистики.

Решение практических задач с применением вероятностных методов.

Знать: понятие события, вероятность события, сложение и умножение вероятностей, основные теоремы и формулы вероятностей ; различные способы представления данных.

Уметь: вычислять вероятность событий; представлять данные в таблицах, диаграммах, в виде графиков.

Теоретическая часть и примеры решения задач

Системы уравнений.

Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Доказать ее совместность и решить: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

Доказать совместность – это значит доказать, что данная система имеет хотя бы одно решение. При доказательстве совместности системы (4.1) может быть использована теорема (1.2) Кронекера-Капелли.

В рассматриваемом случае

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix},$$

требуется доказать, что $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \tilde{A}$.

Для вычисления ранга матрицы может быть использован метод окаймляющих миноров. Минор M_{k+1} порядка $k + 1$, содержащий в себе минор M_k порядка k, называется окаймляющим минором M_k.

Если у матрицы A существует минор $M_k \neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1} = 0$, то $r(A) = k$.

В случае если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных, для доказательства совместности можно воспользоваться теоремой (1.1) Крамера.

1) Применение метода Гаусса для решения систем трех линейных уравнений заключается в последовательном исключении неизвестных в уравнениях системы (4.1) с целью приведения ее к треугольному виду:

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 = d_1; \\ \qquad\quad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 = d_2; \\ \qquad\qquad\quad c_{33}x_3 = d_3. \end{cases} \qquad (4.2)$$

При этом допускаются следующие элементарные преобразования системы, приводящие к эквивалентным системам уравнений:

а) перестановка уравнений в системе;

б) умножение обеих частей уравнений на одно и то же число неравное нулю;

в) прибавление к обеим частям уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число;

г) исключение уравнений вида $0 = 0$.

В полученной системе (4.2), из 3-го уравнения вычисляется x_3 и его значение подставляется во 2-е уравнение, затем из 2-го уравнения вычисляется x_2 и подставляется вместе с x_3 в 1-е уравнение, после чего из 1-го уравнения вычисляется x_1.

2) Для решения систем линейных уравнений средствами матричного исчисления необходимо:

а) вычислить определитель $\Delta = \det A$ матрицы данной системы и убедиться, что $\Delta \neq 0$. Если $\Delta = 0$, то матричный метод не применим;

б) найти матрицу A^{-1}, обратную к матрице A, по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \qquad (4.3)$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A (в нашем случае $i, j = 1, 2, 3$). Напомним, что алгебраическое дополнение A_{ij} равно определителю, полученному из элементов матрицы A после вычеркивания i-й строки и j-го столбца этой матрицы, умноженному на коэффициент, равный $(-1)^{i+j}$;

в) найти решение системы по формуле: $X = A^{-1}B$.

Пример. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2; \\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 4. \end{cases}$$

Доказать ее совместность и решить: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

Решение. Докажем совместность. Запишем расширенную матрицу системы

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & -3 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

и найдем ее ранг. Элемент матрицы $\widetilde{A}$, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, следовательно, $\operatorname{rang}\widetilde{A} \geq 1$. Среди миноров второго порядка, окаймляющих (включающих в себя) этот элемент, также есть отличные от нуля, например:

$$M_{12}^{12} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \text{ , т.е. } \operatorname{rang}\widetilde{A} \geq 2.$$

Из миноров третьего порядка, окаймляющих M_{12}^{12}, возьмем минор $M_{123}^{123} = \Delta$:

$$M_{123}^{123} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-4 + 6) + (12 - 10) + (-9 + 5) = 4 + 2 - 4 = 2.$$

Так как $M_{123}^{123} \neq 0$, то $\operatorname{rang}\widetilde{A} \geq 3$, а так как у матрицы $\widetilde{A}$ миноров 4-го порядка не существует, то $\operatorname{rang}\widetilde{A} = 3$. Так как $\Delta = M_{123}^{123} \neq 0$, то и $\operatorname{rang}A = 3$. Таким образом, $\operatorname{rang}A = \operatorname{rang}\widetilde{A}$, и совместность доказана.

1) Применим метод Гаусса к решению данной системы.

Шаг 1. Умножим 1-е уравнение системы на 1/2, чтобы коэффициент при x_1 стал равен единице.

Шаг 2. Члены первого уравнения, во-первых, умножим на –3 и прибавим к членам второго уравнения, во-вторых, умножим на –5 и прибавим к членам третьего уравнения. В результате получим систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2/2 + x_3/2 = 1; \\ \quad x_2/2 + x_3/2 = -1; \\ -x_2/2 + 3x_3/2 = -1. \end{cases}$$

Шаг 3. К членам третьего уравнения прибавим члены второго уравнения. В результате, получим:

$$\begin{cases} x_1 - x_2/2 + x_3/2 = 1; \\ \quad x_2/2 + x_3/2 = -1; \\ \qquad\qquad 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Таким образом, исходная система приведена к эквивалентной системе треугольного вида. Как известно, она имеет единственное решение. Решаем эту систему, начиная с последнего уравнения:

$$x_3 = -1; \quad x_2 = 2(-1 - x_3/2) = 2(-1 + 1/2) = -1; \quad x_1 = x_2/2 - x_3/2 + 1 = -1/2 + 1/2 + 1 = 1.$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = x_3 = -1$.

2) Применяем матричный метод к решению системы. Формируем матрицы, состоящие из элементов системы:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

а) Определитель системы $\Delta = 2 \neq 0$, значит, матричный метод применим.

б) Запишем систему в матричном виде $AX = B$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

в) Вычисляем алгебраические дополнения A_{ij}:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Подставляя найденные значения A_{ij} в формулу (4.3), получим:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

г) Воспользуемся формулой $X = A^{-1}B$ или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix},$$

получим: $x_1 = (4 + 2 - 4)/2 = 1; \quad x_2 = (-4 + 6 - 4)/2 = -1; \quad x_3 = (-8 + 2 + 4)/2 = -1.$

Ответ: $x_1 = 1, \ x_2 = x_3 = -1$.

Угол между векторами

Скалярным произведением векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначение: $\bar{a}\cdot\bar{b}$ или $(\bar{a},\bar{b})$.

Таким образом, по определению

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=(\bar{a},\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{2.7}$$

где φ угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. По формуле (2.1)

$$\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}=|\bar{a}|\cdot\cos\varphi,\quad \text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot\cos\varphi,$$

т.е.

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}=|\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}. \tag{2.8}$$

Свойства скалярного произведения векторов ($\bar{a}$ и $\bar{b}$ ненулевые векторы)

1°. $\bar{a}\cdot\bar{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi$ прямой угол ($\bar{a}\perp\bar{b}$),

$\bar{a}\cdot\bar{b}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi$ острый угол,

$\bar{a}\cdot\bar{b}<0 \quad\Leftrightarrow\quad \varphi$ тупой угол;

2°. $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$;

3°. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$;

4°. $(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})=\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b})$.

Доказательство

Свойства 1°, 2°

Справедливость этих свойств вытекает непосредственно из определения.

Свойство 3°

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})\overset{(2.8)}{=}|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}(\bar{b}+\bar{c})\overset{(2.2)}{=}|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}+|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{c}\overset{(2.8)}{=}\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}.$$

Свойство 4°

$$(\lambda\bar{a})\cdot\bar{b}\overset{(2.8)}{=}|\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\lambda\bar{a}\overset{(2.3)}{=}\lambda|\bar{b}|\cdot\text{пр}_{\bar{b}}\bar{a}\overset{(2.8)}{=}\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}),$$

$$\bar{a}\cdot(\lambda\bar{b})\overset{(2.8)}{=}|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\lambda\bar{b}\overset{(2.3)}{=}\lambda|\bar{a}|\cdot\text{пр}_{\bar{a}}\bar{b}\overset{(2.8)}{=}\lambda(\bar{a}\cdot\bar{b}).$$

Если $\bar{a}=\bar{b}$, то по определению $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0=|\bar{a}|^2$.

Произведение $\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2$ называется ***скалярным квадратом*** вектора $\bar{a}$.

Получим формулу для вычисления скалярного произведения через координаты сомножителей. Пусть $\bar{a}=a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}$, $\bar{b}=b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}$, тогда, используя доказанные свойства 1° – 4°, получаем:

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\cdot(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=a_xb_x(\bar{i}\cdot\bar{i})+a_yb_x(\bar{j}\cdot\bar{i})+a_zb_x(\bar{k}\cdot\bar{i})+$$

$$+a_xb_y(\bar{i}\cdot\bar{j})+a_yb_y(\bar{j}\cdot\bar{j})+a_zb_y(\bar{k}\cdot\bar{j})+a_xb_z(\bar{i}\cdot\bar{k})+a_yb_z(\bar{j}\cdot\bar{k})+a_zb_z(\bar{k}\cdot\bar{k})=$$

$=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$, так как $\bar{j}\cdot\bar{i}=\bar{k}\cdot\bar{i}=\bar{i}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{j}=\bar{i}\cdot\bar{k}=\bar{j}\cdot\bar{k}=0$ (свойство 1°),

$\bar{i}\cdot\bar{i}=\bar{j}\cdot\bar{j}=\bar{k}\cdot\bar{k}=1$ ($\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ единичные векторы).

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме попарных произведений соответствующих координат этих векторов:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z. \tag{2.9}$$

Основные приложения скалярного произведения

1) Вычисление угла между векторами

Из определения скалярного произведения и формул (2.5), (2.9) следует, что

$$\cos\varphi=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}, \tag{2.10}$$

где φ угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Построение графиков функций

Обозначим f(x) = u, g(x) = v- функции, дифференцируемые в точке x.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$

2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$

3) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций.

1) $C' = 0$;

2) $(x^m)' = mx^{m-1}$;

3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5) $\left(e^x\right)' = e^x$

6) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

7) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

8) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

9) $(\sin x)' = \cos x$

10) $(\cos x)' = -\sin x$

11) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

12) $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

13) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

14) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15) $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

16) $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

17) $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$,

Исследуем функции по следующему алгоритму:

1. ищем производную;
2. приравниваем её к нулю;
3. решаем полученное уравнение;
4. корни отмечаем на числовой прямой и расставляем знаки на промежутках;
5. ищем значение функции в полученных точках;
6. строим схематичный график.

Площадь криволинейной трапеции

Функция F(x) называется первообразной функцией функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство: $F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C. Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$
4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

Площадь ищем по формуле: $S = \int_a^b f(x)dx$

Предел последовательности

Если каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число x_n, то говорят, что задана последовательность. Общий элемент последовательности является функцией от n.

$x_n = f(n)$

Таким образом последовательность может рассматриваться как функция порядкового номера элемента.

Задать последовательность можно различными способами – главное, чтобы был указан способ получения любого члена последовательности.

Пример № 1. $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ или $\{x_n\} = -1; 1; -1; 1; \ldots$

Число a называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого положительного $\varepsilon>0$ существует такой номер N, что для всех $n > N$ выполняется условие: $|a - x_n| < \varepsilon$. Это записывается: $\lim x_n = a$. В этом случае говорят, что последовательность $\{x_n\}$сходится к a при $n \to \infty$.

Основные теоремы о пределах:

Теорема 1. $\lim\limits_{x \to a} C = C$, где C = const.

Следующие теоремы справедливы при предположении, что функции f(x) и g(x) имеют конечные пределы при $x \to a$.

Теорема 2. $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Теорема 3. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)]=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)$

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}C\cdot f(x)=C\cdot\lim\limits_{x\to a}f(x)$

$\frac{1}{0}\to\infty$

$\frac{1}{\infty}\to 0$

Неопределенности:

При избавлении от неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на n в старшей степени.

Пример № 2

Вычислите предел:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{\infty^2-1}{\infty^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2-1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}-\frac{1}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n^2}}{1}=1-\frac{1}{\infty^2}=1$$

При избавлении от неопределенности вида $\frac{0}{0}$ необходимо числитель и знаменатель дроби разложить на множители и сократить общие множители.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Вероятность события А равна отношению числа случаев благоприятствующих событию А к числу всех равновозможных из несовместных случаев: $P(A)=\frac{m}{n}$.

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей. $0 \le P(A) \le 1$

Пример № 1. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем: $P(A)=\frac{3}{10}$; $P(B)=\frac{2}{10}$; $P(C)=\frac{5}{10}$.

Отметим, что вероятность наступления одного из двух попарно несовместных событий равна сумме вероятностей

Правила выполнения и оформления контрольной работы

1. Выбор заданий осуществляется в соответствии со следующей таблицей по варианту, номер которого совпадает с последней цифрой зачётной книжки.

Вариант	Номер заданий
1	1 11 21 31 41 51
2	2 12 22 32 42 52
3	3 13 23 33 43 53
4	4 14 24 34 44 54
5	5 15 25 35 45 55
6	6 16 26 36 46 56
7	7 17 27 37 47 57
8	8 18 28 38 48 58
9	9 19 29 39 49 59
10	10 20 30 40 50 60

2. Контрольная работа оформляется в тонкой тетради синей пастой. На обложке тетради указывается фамилия, имя, отчество студента, его вариант.
3. Решение заданий следует располагать по порядку, указывая номер задания.
4. Решения заданий оформлять аккуратно, подробно описывая ход решения.
5. Решённую контрольную работу сдать учебному секретарю до начала сессии.

Задания для контрольной работы

Решить систему двумя способами или убедиться, что решений нет.(1-10)

1. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=5 \\ 4x_1+3x_2-x_3=8 \\ 8x_1+5x_2-3x_3=16 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+11x_3=7 \\ x_1+x_2+5x_3=3 \\ 2x_1+x_2+3x_3=-1 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1+5x_2+4x_3=20 \\ x_1+3x_2+2x_3=11 \\ 2x_1+10x_2+9x_3=40 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 3x_1+4x_2+x_3=-1 \\ 3x_1+5x_2+3x_3=-1 \\ 6x_1+8x_2+x_3=-3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 7x_1+9x_2+4x_3=0 \\ 2x_1-2x_2+x_3=5 \\ 5x_1+6x_2+3x_3=1 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 6x_1+5x_2-2x_3=-4 \\ 9x_1-x_2+4x_3=13 \\ 3x_1+4x_2+2x_3=1 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1-6x_2+3x_3=-1 \\ 7x_1+2x_2-15x_3=-32 \\ x_1-4x_2+9x_3=5 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=-5 \\ x_1+3x_2-6x_3=2 \\ 3x_1-2x_2+2x_3=9 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 2x_1+11x_2-5x_3=2 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=-3 \\ x_1+3x_2+4x_3=-3 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1-6x_2-4x_3=6 \\ -x_1-6x_2-4x_3=2 \\ 3x_1+9x_2+2x_3=6 \end{cases}$

Найти угол между векторами $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$.(11-20)

11. A(1;2;-3) B(2;1;3) C(3;-1;2)	12. A(5;3;2) B(-2;0;1) C(3;-4;0)	13. A(1;-5;4) B(0;-3;7) C(0;6;-1)	14. A(5;3;-3) B(2;-4;0) C(-4;5;1)	15. A(0;-2;2) B(2;1;5) C(0;1;2)
16. A(5;-1;6) B(2;5;-1) C(0;-3;6)	17. A(1;-1;7) B(2;-3;5) C(0;-3;4)	18. A(1;-2;7) B(0;-5;3) C(2;-6;1)	19. A(1;5;0) B(7;-1;4) C(2;3;-6)	20. A(1;-7;2) B(0;-1;6) C(-3;5;4)

Исследовать функцию с помощью производной и построить её график.(21-30)

21. $y=x^3-3x^2+4$	22. $y=2+3x-x^3$
23. $y=4x^2-x^3-4x$	24. $y=x^3-3x^2+3$
25. $y=4+3x-x^3$	26. $y=x^3+6x^2+9x$
27. $y=x^3-3x^2+5$	28. $y=-4x^{2+}x^{3+}4x$
29. $y=-x^{3-}6x^{2-}9x$	30. $y=x^3-3x^2+6$

Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.(31-40)

31. $y=x^2-6x+9$; $y=x-1$	32. $y=x^2-4x-5$; $y=x+1$
33. $y=x^2-2x+3$; $y=x+3$	34. $y=x^2-2x-1$; $y=x-1$
35. $y=x^2+4x+2$; $y=x+2$	36. $y=x^2+4x+5$; $y=x+5$
37. $y=x^2+6x+9$; $y=x+5$	38. $y=x^2-6x+7$; $y=x-3$
39. $y=x^2+4x+3$; $y=x+3$	40. $y=x^2+6x+11$; $y=x+7$

Найти предел.(41-50)

41. $\lim\limits_{x\to-3}\frac{x^2+7x+12}{x^2+2x-3}$	42. $\lim\limits_{x\to-1}\frac{x^2+7x+6}{x^2-4x-5}$	43. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-2x-8}$
44. $\lim\limits_{x\to5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-3x-10}$	45. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-4x+3}{x^2-5x+6}$	46. $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x^2+6x+8}{x^2-3x-10}$
47. $\lim\limits_{x\to-4}\frac{x^2+9x+20}{x^2+3x-4}$	48. $\lim\limits_{x\to4}\frac{x^2-6x+8}{x^2-7x+12}$	49. $\lim\limits_{x\to-6}\frac{x^2+8x+12}{x^2+4x-12}$
50. $\lim\limits_{x\to7}\frac{x^2-9x+14}{x^2-6x-7}$		

Решить задачу по теории вероятности.(51-60)

51. В коробке 10 белых шаров и 14 чёрных. Из коробки вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?
52. В коробке 50 красных карандашей и 10 зелёных. Из коробки вынимают три карандаша. Какова вероятность того, что все карандаши окажутся красными?
53. В корзине 5 белых шаров, 3 чёрных, 2 в полоску, 7 в клетку. Найти вероятность того, что извлечён одноцветный шар.
54. В корзине 5 белых перчаток и 7 чёрных. Найдите вероятность того, что наугад взятая пара будет однотонной.
55. На карточках написаны натуральные числа от1 до 8. Карточки перевернули и перемешали. Какова вероятность того, что наугад выбранная карточка с числом 8?
56. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность появления хотя бы одной шестёрки?
57. Нестандартных изделий в партии 5%. Какова вероятность того, что два наугад взятых изделия будут стандартными?
58. В лотерее 20 билетов, 10 из которых выигрышные. Куплено 5 билетов. Какова вероятность того, что хотя бы один из купленных билетов выигрышный?
59. Из букв разрезной азбуки составлено слово «ананас». Карточки с буквами перевернули и перемешали. Выбрали наугад три карточки. Какова вероятность того, что на всех трёх нарисована буква «а»?
60. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность появления одновременно двух шестёрок?

Список литературы

1. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.
2. Беклемешев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
3. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.
4. Данко П. Е., Попов А. Г. Высшая математика в упражнениях и задачах.
5. Курош А. Г. Курс высшей алгебры.
6. Ильин В. А., Поздняк Е. Г. Линейная алгебра.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. (в 3 томах)
8. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа. Том 1, 2.
9. Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу.
10. Кремер Н.Ш. «Теория вероятностей и математическая статистика».
11. Вентцель Е.С. «Теория вероятностей».
12. Гнеденко Б. В. «Курс теории вероятностей».